

ANTWOORDEN**Doorsnedegrootheden**

2.1.1 a) met de oorsprong van het assenstelsel in punt C:

$$Z = (200; 262,5) \text{ mm}$$

b) $I_{zz} = 39,1 \times 10^8 \text{ mm}^4$

$$I_{yy} = 25,3 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 0$$

c) met behulp van de Cirkel van Mohr/transformatieregels:

$$I_{zz} = I_{yy} = 32,2 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 6,9 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

d) $I_{z'z'} = 149,4 \times 10^8 \text{ mm}^4$

$$I_{y'y'} = 89,3 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{y'z'} = I_{z'y'} = 84 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

2.1.2 A) (linker doorsnede)

a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksonder:

$$Z = (-30; -30) \text{ mm}$$

b) Zie boek deel 2: Spanningen, Vervormingen en Verplaatsingen, §3.2.4 **Voorbeeld 4**

$$I_{zz} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}b^3h + \frac{1}{12}\frac{bh^3}{\tan^2 \alpha} \quad \text{met : } \tan \alpha = 2$$

$$I_{yz} = \frac{1}{12}\frac{bh^3}{\tan \alpha}$$

$$I_{zz} = 54 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = 27 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 27 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

c) met cirkel van Mohr of transformatieregels: $\alpha_1 = -31,7^\circ$; $\alpha_2 = 238,3^\circ$

d) $I_1 = 70,7 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$$I_2 = 10,3 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

B) (middelste doorsnede)

a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksonder

$$Z = (-30; -20) \text{ mm}$$

b) met behulp van de Cirkel van Mohr

$$I_{zz} = 54,0 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = 121,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -40,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

c) $\alpha_1 = -25,1^\circ$

$$\alpha_2 = 244,9^\circ$$

d) $I_1 = 140,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$$I_2 = 35,0 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

- C) (rechter doorsnede)
- a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksonder
 $Z = (-40; -20) \text{ mm}$
- b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 54 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_{yy} = 94,4 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = I_{zy} = -13,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- c) $\alpha_1 = -16,9^\circ$
 $\alpha_2 = 253,1^\circ$
- d) $I_1 = 98,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 49,9 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- 2.1.3 b) $I_{z''z''} = 1/4 bh^3$
- 2.1.4 A) (linker doorsnede)
- a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksboven
 $Z = (-25; 11,667) \text{ mm}$
- b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 10,75 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_{yy} = 22,75 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = I_{zy} = 6 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- c) $\alpha_1 = 22,5^\circ$
 $\alpha_2 = 292,5^\circ$
- d) $I_1 = 25,2 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 8,3 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- B) (rechter doorsnede)
- a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksboven
 $Z = (-50; 40) \text{ mm}$
- b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 263,3 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_{yy} = 141,7 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = I_{zy} = -131,6 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- c) $\alpha_1 = 32,6^\circ$
 $\alpha_2 = 302,6^\circ$
- d) $I_1 = 347,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 57,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- 2.1.5 A) (linker doorsnede)
- a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksboven
 $Z = (-2/3a; a)$
- b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 4,667ta^3$
 $I_{yy} = 2,667ta^3$
 $I_{yz} = I_{zy} = 0$
- c) $\alpha_1 = 0^\circ$

- d) $\alpha_2 = 270^\circ$
 $I_1 = 4,667ta^3$
 $I_2 = 2,667ta^3$
- e) voor $\alpha = -45^\circ$, $I_{yz} = I_{zy} = ta^3$
 voor $\alpha = 225^\circ$, $I_{yz} = I_{zy} = -ta^3$
- B) (rechter doorsnede)
- a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt linksboven
 $Z = (-a; a)$
- b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 4,667ta^3$
 $I_{yy} = 1,333ta^3$
 $I_{yz} = I_{zy} = -2ta^3$
- c) $\alpha_1 = 25,1^\circ$
 $\alpha_2 = 295,1^\circ$
- d) $I_1 = 5,6ta^3$
 $I_2 = 0,4ta^3$
- e) voor $\alpha = 45^\circ$, $I_{yz} = I_{zy} = -2,6ta^3$
 voor $\alpha = 315^\circ$, $I_{yz} = I_{zy} = 2,6ta^3$
- 2.1.6 a) met de oorsprong van het assenstelsel in het hoekpunt rechtsonder
 $Z = (100; -150) \text{ mm}$
- b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 210 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yy} = 120 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = I_{zy} = 80 \times 10^6 \text{ mm}^4$
- c) $\alpha_1 = -30,3^\circ$
 $\alpha_2 = 239,7^\circ$
 $I_1 = 257 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 73,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Normaalspanningen bij buiging

$$2.2.1 \quad \sigma = \left(3 \frac{Fl}{ta^3}\right)y + \left(-\frac{6}{7}\sqrt{3} \frac{Fl}{ta^3}\right)z$$

twee willekeurige punten:

$$y = z = -0,5a \quad \sigma = -0,758 \frac{Fl}{ta^2}$$

$$y = z = 0,5a \quad \sigma = +0,758 \frac{Fl}{ta^2}$$

- 2.2.2 a) eenheden N, mm :
 $\sigma = -2,06737y - 0,626560z$
 b) $n.l., \sigma = 0, z = -3,29956y, \alpha = -73,1^\circ$
 c) $\alpha_k = 16,9^\circ$

- 2.2.3 A) (linker doorsnede)
 a) $\tan(\alpha_m) = 4/3, \alpha_m = 53^\circ$ (uitwerking beschikbaar bij StudentAssistenten)
 b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 3,413 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yy} = 5,973 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = I_{zy} = 2,56 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $\alpha_1 = 31,7^\circ$
 $\alpha_2 = 301,7^\circ$
 c) $\tan(\alpha_m) = 4/3, \alpha_m = 53^\circ$

- B) (rechter doorsnede)
 a) $\tan(\alpha_m) = -16/9, \alpha_m = -60,6^\circ$
 b) met behulp van de Cirkel van Mohr:
 $I_{zz} = 3,413 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yy} = 5,333 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = I_{zy} = -1,92 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $\alpha_1 = -31,7^\circ$
 $\alpha_2 = 238,3^\circ$
 c) $\tan(\alpha_m) = -16/9, \alpha_m = -60,6^\circ$

2.2.4 $\tan(\alpha_m) = -h/b$ (Dit is de andere diagonaal!!!)

2.2.5 Deze opgave is het makkelijkste wanneer eerst b) uitgerekend wordt!

- b) $\sigma = 0,5y$, punt B: $\sigma = -20 \text{ Mpa}$
 a) $M = 509 \text{ Nm}, \alpha_m = -45^\circ$ (krachtlijn door zwaartepunt en punt B!)

```
> restart;
> My:=(1/2)*F*L;
> Mz:=- (1/2)*sqrt(3)*F*L;
> Iyy:=2*(1/12)*t*a^3;
> Izz:=(1/12)*t*a^3+2*t*a*((1/2)*a)^2;
> kappay:=My/(E*Iyy);
> kappaz:=Mz/(E*Izz);
> sigma:=E*(kappay*y+kappaz*z);
> y:=- (1/2)*a; z:=y; evalf(sigma);
> y:=(1/2)*a; z:=y; evalf(sigma);
```

```
> restart;
units N, mm;
> zNC:=(40*4^2+56*4*(4+28))/(40*4+56*4);
> Iyy:=(1/12)*4*40^3+(1/12)*56*4^3;
> Izz:=(1/12)*40*4^3+(40*4*(zNC-2)^2)+(1/12)*4*56^3+4*56*(28+4-zNC)^2;
> M:=100e3; My:=- (1/5)*sqrt(5)*M; Mz:=- (2/5)*sqrt(5)*M;
Note : Sign is lost but load situation is given, so My and Mz are both negative!
> kappay:=My/(E*Iyy); kappaz:=Mz/(E*Izz);
> evalf(kappay/kappaz);
> alphak:=evalf((180/Pi)*arctan(kappaz/kappay));
> alphaNA:=alphak-90;
> sigma:=simplify(evalf(E*(kappay*y+kappaz*z)));
> y:=0; z:='z': plot(sigma,z=-zNC..(60-zNC));
> z:=0; y:='y': plot(sigma,y=-20..20);
```

$$2.2.6 \quad F_z = 14,62 \times 10^3 - 5,73F_y \text{ (N)}$$

$$F_{z,\max} = 2,17 \text{ kN}$$

$$F_{y,\max} = 2,17 \text{ kN}$$

$$2.2.7 \quad I_{zz} = 4,93 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = 1,733 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 1,2 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

Verschillende mogelijkheden:

$$- \sigma_A = +70 \text{ MPa} \quad \sigma_F = -50 \text{ MPa} \quad M_y = 240 \text{ KNm} \quad M_z = 987 \text{ KNm}$$

$$- \sigma_A = -50 \text{ MPa} \quad \sigma_E = +70 \text{ MPa} \quad \text{zelf doen}$$

$$- \sigma_D = +70 \text{ MPa} \quad \sigma_F = -50 \text{ MPa} \quad \text{zelf doen}$$

$$2.2.8 \quad \text{a)} \quad \sigma_A = +18\sigma \quad \sigma_C = -6\sigma$$

$$\text{b)} \quad \text{n.l.} \quad 2y + z = 0$$

$$\text{c)} \quad I_{yy} \text{ loodrecht op nl} = 7ta^3$$

$$2.2.9 \quad \text{a)} \quad \sigma_P = +125 \text{ MPa} \quad \sigma_Q = -83,3 \text{ MPa}$$

b) Dwarskrachtencentrum DC valt samen met Q en wringend moment is:

$$M_t = 500 \times 15 = 7500 \text{ Nmm} \quad (\text{rechtsom})$$

c) gebruik pseudo-load: $F_y^* = 468.75 \text{ N}$; $F_z^* = 781.25 \text{ N}$; results in

$$u_y = \frac{F_y^* l^3}{3EI_{yy}} = 3.472 \text{ mm}; \quad u_z = \frac{F_z^* l^3}{3EI_{zz}} = 5.787 \text{ mm}; \quad u = 6.75 \text{ mm}$$

d) neutrale lijn: $3y + 5z = 0$, in snijpunt met verticaal deel QP:

$$R_M^{(a)} = \frac{1}{2} \times (60 - 9 - 15) \times 5 \times 125 = 11250 \text{ N}$$

$$\tau = \frac{R_M^{(a)} \times 500}{5 \times 500 \times 1000} = 2.25 \text{ N/mm}^2$$

Merk op: gebruik aanduiding τ als geen tekeninformatie wordt gevraagd.

$$2.2.10 \quad N_{BC} = +592 \text{ N} \quad \sigma = +79 \text{ MPa}$$

maximum $\tau = 1.4 \text{ MPa}$ (dunwandig)

$$M_t = \frac{29 \times 592 + 1000 \times 29}{1000} = 46,16 \text{ Nm} \quad (\text{rechtsom})$$

De complete MAPLE-invoer voor dit probleem is op de volgende bladzijde gegeven.

```

> restart;
> L:=2000; a:=100; t:=10; Fz:=1000;
> Es:=2.1e5;
with respect to corner point in cross section, NOT thin walled:
> A:=a*t+(a-t)*t; EA:=Es*A;
> zNC:=(a*t*a/2+(a-t)*t*(t/2))/A; zNC:=evalf(round(%));
> yNC:=(a*t*a/2+(a-t)*t*t/2)/A; yNC:=evalf(round(%));
> Izz:=(1/12)*t*a^3+a*t*((a/2)-zNC)^2+(1/12)*(a-t)*t^3+(a-t)*t*(yNC-t/2)^2;
> Iyy:=Izz; evalf(%);
> Iyz:=a*t*(yNC-t/2)*(zNC-(a/2))+(a-t)*t*(-t-(a-t)/2+yNC)*(zNC-t/2); evalf(%);
> EIyy:=Es*Iyy; EIyz:=Es*Iyz; EIzz:=Es*Izz;
> Fy_pseudo:=(EIzz*EIyy*Fy-EIyz*EIyy*Fz)/(EIyy*EIzz-EIyz^2);
> Fz_pseudo:=(-EIyz*EIzz*Fy+EIyy*EIzz*Fz)/(EIyy*EIzz-EIyz^2);
no displacement in y-direction, so Fy-pseudo MUST be zero!! -> solve actual Fy
> eq:=Fy_pseudo=0; Fy:=solve(eq,Fy);
> V:=sqrt(Fy^2+Fz^2);
> My:=-Fy*L; Mz:=-Fz*L; M:=sqrt(My^2+Mz^2);
> eps:=0;
> kappay:=(1/(EIyy*EIzz-EIyz^2))*(EIzz*My-EIyz*Mz);
> kappaz:=(1/(EIyy*EIzz-EIyz^2))*(-EIyz*My+EIyy*Mz);
> strain:=eps+kappay*y+kappaz*z;
stresses in outer fibres (top and bottom since n.a. runs horizontal through NC):
> y:=yNC; z:=-a+zNC; SigmaTop:=Es*strain;
> y:=yNC; z:=+zNC; SigmaBot:=Es*strain;
displacements of Z:
> uy:=Fy_pseudo*L^3/(3*EIyy);
> uz:=Fz_pseudo*L^3/(3*EIzz);
> u:=sqrt(uy^2+uz^2);
shear stress (thin walled): (where neutral axis intersects with vertical part of the cross section)
> RM:=(1/2)*(a-zNC)*t*SigmaTop;
> tau:=RM*V/(t*M);
> Mt:=Fz*yNC-Fy*29;

```

Normaalspanning bij buiging met normaalkracht

- 2.3.1 a) In D $\sigma_{xx} = +1$ MPa In B $\sigma_{xx} = -2$ MPa (nl $3y = 100$)
 b) In D $\sigma_{xx} = -0.5$ MPa In B $\sigma_{xx} = -3.5$ MPa (nl $3y + 6z - 100 = 0$)

- 2.3.2 a) In C $\sigma_{xx} = 1.818$ MPa nl: $y = 55$

```
> restart;
assignment 2.3.2 a) : units N, mm:
> F:=10e3; t:=10;
> A:=2*150*t+200*t;
> yNC:=(2*150*t*75+200*t*150)/A;
> Iyy:=200*t*(yNC-150)^2+2*((1/12)*150^3*t+150*t*(yNC-75)^2);
> Iyz:=0;
> Izz:=(1/12)*t*200^3+2*150*t*100^2; evalf(%);
deformation of the cross section:
> eps:=N/(Emod*A);
> kappay:=1/(Emod*Iyy*Emod*Izz-Emod*Iyz*Emod*Iyz)*
      (Emod*Izz*My-Emod*Iyz*Mz);
> kappaz:=1/(Emod*Iyy*Emod*Izz-Emod*Iyz*Emod*Iyz)*
      (-Emod*Iyz*My+Emod*Iyy*Mz);
> sigma:=Emod*(eps+kappay*y+kappaz*z);
a) loading at A:
> N:=-F; ey:=-45; ez:=0; My:=N*ey; Mz:=N*ez;
> simplify(27.5*sigma);
sigma at C:
> y:=105; z:=100; evalf(sigma);
sigma at B:
> y:=-45; z:=-100; evalf(sigma);
sigma at A:
> y:=-45; z:=0; evalf(sigma);
```

- b) In C $\sigma_{xx} = 4.545$ MPa nl: $4y + 3z - 220 = 0$
- 2.3.3 A) (linker doorsnede)
 a) $N = 1/4 \times h b \sigma$
 b) $y_k = 0$ $z_k = -1/2 \times h$
- B) (rechter doorsnede)
 a) $N = 2 \sigma a^2$
 b) $y_k = 1/4 a$ $z_k = -1/3 a$

Inhomogene doorsneden belast op buiging

- 2.4.1 a) $\sigma_s = - 8.58 \text{ MPa}$ $\sigma_b = - 0.60 \text{ MPa}$
b) $\Delta L = 0.17 \text{ mm}$
c) $N_{\max} = 2660 \text{ kN}$ (beton maatgevend)
- 2.4.2 a) $N = 2188 \text{ kN}$ (beton maatgevend)
b) NC verticaal in het midden horizontaal op 336.5 mm van de linker zijde
- 2.4.3 a) Met assenstelsel oorsprong rechts boven in de hoek. y-as naar links en z-as naar beneden: zwaartepunt $y = 36.41 \text{ mm}$ $z = 50.77 \text{ mm}$
b) $F = 312 \text{ kN}$, materiaal 4 is maatgevend

Inhomogene doorsneden belast op buiging

- 2.5.1 a) $F = 672 \text{ N}$
 b) $F = 3808 \text{ N}$
 c) $F = 1232 \text{ N}$
 d) $F = 6203 \text{ N}$

- 2.5.2 Van boven naar beneden
 In 1 van 60 naar 24 (rechte lijn)
 In 2 van 32 naar -16
 In 3 van -20 naar -80
 Alles in N/mm^2

N.B. bij de overgangen tussen materialen dus sprongen in het spanningsdiagram

- 2.5.3 $\kappa_z = 0.212 \text{ m}^{-1}$
 $\varepsilon^T = 2,55 \times 10^{-3}$

Spanningsverdeling van boven naar beneden:

In 1 van +33,6 tot -51,2
 In 2 van +23,05 tot -5,36
 Alles in N/mm^2

N.B. bij de overgangen tussen materialen dus sprongen in het spanningsdiagram

- 2.5.4 a) $F = -226 \text{ kN}$
 b) $e = 438 \text{ mm}$ vanaf linker zijde; (82 mm links v/d rechter zijde)
 $e_y = -127 \text{ mm}$ (t.o.v. NC v/d gescheurde doorsnede)

- 2.5.5 NC ligt 271 mm vanaf bovenrand
spanning boven $-2,83 \text{ N/mm}^2$
 onder $1,34 \text{ N/mm}^2$
 staal $12,34 \text{ N/mm}^2$

- 2.5.6 NC ligt 258 mm vanaf bovenrand
spanning boven $-2,94 \text{ N/mm}^2$
 staal $15,77 \text{ N/mm}^2$

```
> restart;
= assignment 2.5.5 and 2.5.6
= units N, mm:
> As:=4800; Mz:=20e6;
> Ec:=14000; Es:=210000;
> b:=200; h:=400; a:=50;
= NC for uncracked cross section with respect to top: (assume As << Ac)
> EA:=As*Es+(b*h)*Ec;
> zNC:=(Es*As*(h-a)+Ec*b*h*(h/2))/EA: evalf(zNC);
= Bending stiffness:
> EIzz:=Ec*((1/12)*b*h^3+b*h*(zNC-h/2)^2)+Es*As*(zNC-(h-a))^2:
= Stresses in concrete and steel:
> SIGc_top:=evalf(Ec*(Mz*(-zNC)/EIzz));
> SIGc_bot:=evalf(Ec*(Mz*(h-zNC)/EIzz));
> SIGs:=evalf(Es*(Mz*(h-a-zNC)/EIzz));
=
= NC for cracked cross section with respect to top:
> EA:=As*Es+b*x*Ec;
> eq:=(Es*As*(h-a)+Ec*b*x*(x/2))/EA=x:
> sol:=solve(eq,x): x:=sol[2]: evalf(x);
= Bending stiffness:
> EIzz:=Ec*(1/3)*b*x^3+Es*As*(h-a-x)^2:
= Stresses in concrete and steel:
> SIGc_top:=evalf(Ec*(Mz*(-x)/EIzz));
> SIGs:=evalf(Es*(Mz*(h-a-x)/EIzz));
>
```

Kern

2.6.1 a) + b) De kern bestaat uit een driehoek waarvan de drie hoekpunten t.o.v. van het zwaartepunt zijn

1) $e_y = -1/12 \times a$

$e_z = 1/12 \times a$

2) $e_y = -1/12 \times a$

$e_z = -1/6 \times a$

3) $e_y = +1/6 \times a$

$e_z = +1/12 \times a$

c) $\sigma_A = 24 \times M/a^3$

$\sigma_B = -24 \times M/a^3$

$\sigma_C = 0$ (op neutrale lijn)

d) krachtlijn maakt hoek van $+27^\circ$ graden met de y-as en gaat door punt C

2.6.2 a) kern bestaat uit een vierhoek met de hoekpunten t.o.v. NC

1) $e_y = 0$

$e_z = +7/9 \times a$

2) $e_y = 0$

$e_z = -7/9 \times a$

3) $e_y = +1/9 \times a$

$e_z = 0$

4) $e_y = -1/9 \times a$

$e_z = 0$

b) kern bestaat uit een vierhoek met de hoekpunten t.o.v. NC

1) $e_y = 0$

$e_z = +13/15 \times a$

2) $e_y = 0$

$e_z = -13/15 \times a$

3) $e_y = +4/15 \times a$

$e_z = 0$

4) $e_y = -4/15 \times a$

$e_z = 0$

c) kern bestaat uit een vierhoek met de hoekpunten t.o.v. NC

$I_{yy} = \frac{7}{4}ta^3; I_{yz} = -ta^3; I_{zz} = \frac{52}{15}ta^3;$

1) $e_y = -5/22 \times a$ 2) $e_y = -1/4 \times a$

$e_z = -2/15 \times a$ $e_z = +13/15 \times a$

3) $e_y = +7/10 \times a$ 4) $e_y = +1/6 \times a$

$e_z = -2/5 \times a$ $e_z = -26/45 \times a$

2.6.3 A) (linker doorsnede)

a) $I_{yy} = 48 \cdot ta^3$ en $I_{zz} = 85/3 \cdot ta^3$

kern bestaat uit een driehoek met de hoekpunten t.o.v. NC

- 1) $e_y = 0$
 $e_z = +17/12 \times a$
- 2) $e_y = +16/11 \times a$
 $e_z = -85/132 \times a$
- 3) $e_y = -16/11 \times a$
 $e_z = -85/132 \times a$

b) spanning in de hoekpunten:

$$\sigma_A = -83/272 \cdot F/ta \quad (\text{met } F = \text{werkend als een drukkracht in punt A})$$

$$\sigma_B = 19/272 \cdot F/ta$$

$$\sigma_C = 1/17 \cdot F/ta$$

```
> restart;
opdracht 2.6.3 a)
units N, mm:
(c) 2021 : Hans Welleman
=====
methode 1 : massieve doorsnede, buiten-driehoek 1 en binnen-driehoek 2
> t:=0.00001*a; # assume thin walled ....
> h1:=4*a; b1:=6*a; h2:=h1-t-(5/3)*t; b2:=b1-2*((5/4)+(3/4))*t;
> A1:=(1/2)*h1*b1; A2:=(1/2)*h2*b2;
> A:=A1-A2;
> zNC:=(A1*(1/3)*h1-A2*((1/3)*h2+t))/A; simplify(%);
> Izz:=(1/36)*b1*h1^3+A1*(zNC-(h1/3))^2-((1/36)*b2*h2^3+A2*(zNC-t-(h2/3))^2);
> Iyy:=(1/48)*b1^3*h1-(1/48)*b2^3*h2; %/t;
> Iyz:=0; # by definition due to symmetry
methode 2 : dunne strip (zie Hartsuijker & Welleman volume 2, page 131-132):
> restart;
> A:=6*a*t+10*a*t;
> zNC:=2*5*a*t^2*a/A;
> Izz:=6*a*t*zNC^2+2*((1/12)*(5*t/4)*(4*a)^3+5*a*t*(zNC-(2*a))^2);
> Iyy:=(1/12)*t*(6*a)^3+2*((1/12)*(5*t/3)*(3*a)^3+5*a*t*((3*a/2))^2);
> Iyz:=0; # by definition due to symmetry
> ey:=-1/A*(Iyy*(1/y1)+Iyz*(1/z1));
> ez:=-1/A*(Iyz*(1/y1)+Izz*(1/z1));
Neutrale lijn langs bovenrand:
> y1:=infinity; z1:=(-zNC); ey1:=simplify(ey); ez1:=simplify(ez);
> evalf(ey); evalf(ez);
Neutrale lijn langs linkerrand:
> y1:=(33*a)/16; z1:=(11*a)/4; ey1:=simplify(ey); ez1:=simplify(ez);
> evalf(ey); evalf(ez);
Neutrale lijn langs rechterrاند:
> y1:=(-33*a)/16; z1:=(11*a)/4; ey1:=simplify(ey); ez1:=simplify(ez);
> evalf(ey); evalf(ez);
```

- B) (rechter doorsnede)
- a) $I_{yy} = 21 \cdot ta^3$ en $I_{zz} = 19 / 2 \cdot ta^3$
 kern bestaat uit een driehoek met de hoekpunten t.o.v. NC
 1) $e_y = - 1/4 \times a$
 $e_z = - 19/24 \times a$
 2) $e_y = + 7/6 \times a$
 $e_z = + 1/6 \times a$
 3) $e_y = - 3 \times a$
 $e_z = + 13/12 \times a$
- b) zelf doen
- 2.6.4 a) n.l.: $z = y + 350$ (in mm)
 $e_y = + 21,4$ mm
 $e_z = - 38$ mm
- b) spanning in de hoekpunten:
 $\sigma_A = -0.71$ MPa
 $\sigma_B = 0$
 $\sigma_C = -0.95$ MPa
 $\sigma_D = -1.66$ MPa

2.6.5 kern bestaat uit een zeshoek met de hoekpunten t.o.v. NC

- 1) $e_y = - 33,33$ mm
 $e_z = 0$
- 2) $e_y = - 94,1$ mm
 $e_z = - 20,43$ mm
- 3) $e_y = 0$
 $e_z = + 64,5$ mm
- 4) $e_y = + 33,33$ mm
 $e_z = 0$
- 5) $e_y = + 94,1$ mm
 $e_z = - 20,4$ mm
- 6) $e_y = 0$
 $e_z = - 49,3$ mm

Het buigend moment zorgt voor trek aan de onderzijde. Het krachtpunt van de voorspanning moet dus zeker onder kernpunt 6 aangrijpen. Als de voorspanning (zonder moment) aangrijpt in kernpunt 3, dan ligt de neutrale lijn in de bovenste vezel.

Met moment moet de voorspanning dus onder kernpunt 3 aangrijpen om een zo groot mogelijk moment op te kunnen nemen.

- 2.6.6 a) ligging van NC ten opzichte van punt D:
 $y_{NC} = 50$ mm
 $z_{NC} = 26,76$ mm
 traagheidsmomenten:

$I_{zz} = 780.000 \text{ mm}^4$, $I_{yy} = 945.000 \text{ mm}^4$, $I_{yz} = -585.000 \text{ mm}^4$
 kern bestaat uit een vierhoek met de hoekpunten t.o.v. NC:

- 1) $e_y = +6,5 \text{ mm}$
 $e_z = -8,67 \text{ mm}$
- 2) $e_y = +10,36 \text{ mm}$
 $e_z = -3,10 \text{ mm}$
- 3) $e_y = -8,13 \text{ mm}$
 $e_z = +10,83 \text{ mm}$
- 4) $e_y = -5,71 \text{ mm}$
 $e_z = -3,10 \text{ mm}$

b) $\sigma(y, z) = +222,2y + 359z$, in N/mm^2

spanningen in de hoekpunten:

$$\sigma_A = +9,75 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = +3,08 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_C = -11,80 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D = +1,54 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

c) $\kappa_y = 0$, $M_y/M_z = -1,077$

hoek met de horizontaal: 43° (rechtsom)

2.6.7 A) (rechter doorsnede)

a) ligging van NC ten opzichte van punt A:

$$y_{NC} = -25 \text{ mm}$$

$$z_{NC} = +11,67 \text{ mm}$$

traagheidsmomenten:

$$I_{zz} = 107.500 \text{ mm}^4, I_{yy} = 227.500 \text{ mm}^4, I_{yz} = 60.000 \text{ mm}^4$$

$$\text{spanningsformule: } \sigma(y, z) = -2,8768y + 10,9080z, \text{ in } \text{N/mm}^2$$

spanningen in de hoekpunten:

$$\sigma_A = -199 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = -27 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_C = +83 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_D = -33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_E = +295 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_F = +266 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_G = -61 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_H = -90 \text{ N/mm}^2$$

b) voorwaarde: $\sigma_A = -\sigma_E$, waardoor geldt: $\kappa_y = -5/9 \cdot \kappa_z$

hoek met de horizontaal: 48° (rechtsom)

c) $\kappa_y = 0$

profiel draaien naar de hoofdrichting:

hoek met de horizontaal: 29° (linksom)

- B) (linker doorsnede)
- a) ligging van NC ten opzichte van punt A:
 $y_{NC} = -6,67 \text{ mm}$
 $z_{NC} = +13,33 \text{ mm}$
 traagheidsmomenten:
 $I_{zz} = 35.556 \text{ mm}^4$, $I_{yy} = 8.389 \text{ mm}^4$, $I_{yz} = 8.389 \text{ mm}^4$
 spanningsformule: $\sigma(y, z) = -36,809y + 36,809z$, in N/mm^2
 spanningen in de hoekpunten:
 $\sigma_A = -736 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_B = 0 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_C = +736 \text{ N/mm}^2$
- b) voorwaarde: $\sigma_A = -\sigma_B$, waardoor geldt: $\kappa_y = -4 \cdot \kappa_z$
 hoek met de horizontaal: 903° (rechtsom)
- c) $\kappa_y = 0$
 profiel draaien naar de hoofdrichting:
 hoek met de horizontaal: 14° (linksom)
- 2.6.8 a) ligging van NC ten opzichte van punt D:
 $y_{NC} = -100 \text{ mm}$
 $z_{NC} = +50 \text{ mm}$
 traagheidsmomenten:
 $I_{zz} = 585 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{yy} = 270 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{yz} = -180 \times 10^6 \text{ mm}^4$
- b) kern bestaat uit een vierhoek met de hoekpunten t.o.v. NC:
 1) $e_y = -150 \text{ mm}$
 $e_z = +100 \text{ mm}$
 2) $e_y = +20 \text{ mm}$
 $e_z = +90 \text{ mm}$
 3) $e_y = +75 \text{ mm}$
 $e_z = -50 \text{ mm}$
 4) $e_y = +40 \text{ mm}$
 $e_z = -130 \text{ mm}$
- c) spanningsformule: $\sigma(y, z) = 0,11 - 0,0011y$, in N/mm^2
 $\sigma_A = 0$
 $\sigma_B = +0,33 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_C = +0,33 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_D = 0$
 $\sigma_E = 0$

Schuifspanningen bij buiging

$$2.7.1 \quad I_{zz} = \frac{2}{3} t \sqrt{2} \cdot a^3$$

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{3Q}{4at}$$

$$\tau_C = 0$$

de plaats van de werklijn: $0.5 \times a$ links van het NC ($y = +0.5 \times a$)

$$2.7.2 \quad I_{zz} = \frac{5}{24} ta^3, \quad I_{yy} = \frac{5}{24} ta^3, \quad I_{yz} = \frac{1}{8} ta^3$$

neutrale lijn: $-3y + 5z = 0$

normaalspanningen in de hoekpunten:

$$\sigma_A = \frac{9M}{2ta^2}$$

$$\sigma_B = -3 \frac{M}{ta^2}$$

$$\sigma_C = \frac{3M}{2ta^2}$$

schuifspanningen in de hoekpunten:

$$\tau_A = \tau_C = 0$$

$$\tau_B = \frac{3Q}{4at}$$

de maximale schuifspanning in deel AB: $\tau_{AB, \max} = 1,35 \cdot \frac{Q}{at}$

de maximale schuifspanning in deel BC: $\tau_{BC, \max} = \frac{Q}{4at}$

de plaats van de werklijn: $0.25 \times a$ rechts van het NC ($y = -0.25 \times a$)

2.7.3 schuifspanningen in de aangegeven punten:

$$\tau_A = \tau_D = \frac{Q}{4th}$$

$$\tau_B = \tau_C = \frac{11Q}{12th}$$

$$\tau_E = 0$$

$$\tau_H = \frac{7Q}{6th}$$

de plaats van de werklijn: $y = -\frac{7}{9}h$

2.7.4 traagheidsmomenten ten opzichte van NC:

$$I_{zz} = \frac{37}{48} ta^3$$

$$I_{yy} = 2 \frac{7}{16} ta^3$$

$$I_{yz} = -1 \frac{1}{16} ta^3$$

$$\text{neutrale lijn: } 125y + 219z = 0$$

normaalspanningen in de hoekpunten:

$$\sigma_A = 3 \frac{13}{36} \frac{M}{ta^2}$$

$$\sigma_B = -3 \frac{7}{12} \frac{M}{ta^2}$$

$$\sigma_C = 2 \frac{1}{2} \frac{M}{ta^2}$$

$$\sigma_D = -\frac{35}{36} \frac{M}{ta^2}$$

schuifspanningen in de hoekpunten:

$$\tau_A = \tau_D = 0$$

$$\tau_B = -0,22 \frac{M}{\ell ta}$$

$$\tau_C = -0,764 \frac{M}{\ell ta}$$

$$\text{de maximale schuifspanning in deel AB: } \tau_{AB,\max} = 1,627 \cdot \frac{M}{\ell ta}$$

$$\text{de maximale schuifspanning in deel BC: } \tau_{BC,\max} = -1,278 \frac{M}{\ell ta}$$

$$\text{de maximale schuifspanning in deel CD: } \tau_{CD,\max} = 0,136 \frac{M}{\ell ta}$$